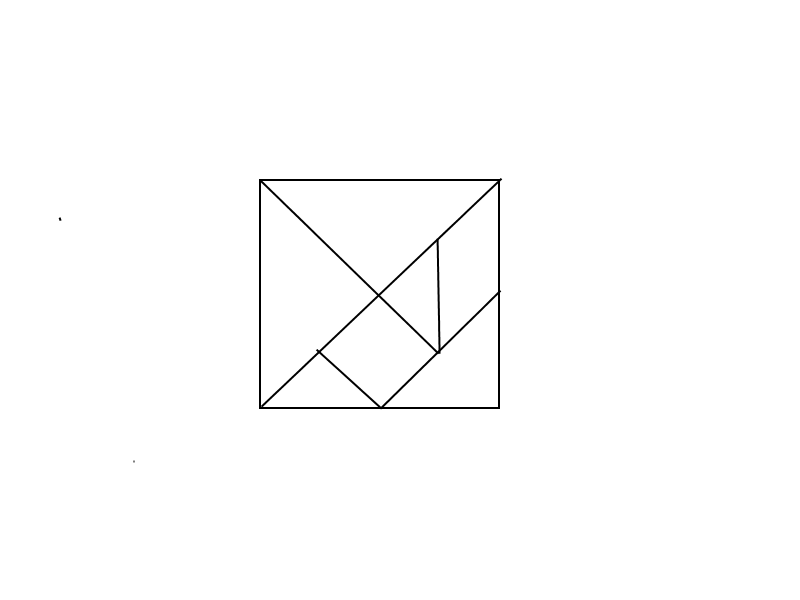
**Превращения квадрата.**

В умелых руках любознательного человека самый обыкновенный, хорошо всем знакомый квадрат становится удивительной геометрической фигурой.

Он может, например весь без остатка превратиться в другую фигуру или в несколько других фигур правильной или неправильной формы. Но для каждого превращения квадрат предварительно должен быть разрезан на определенные части.

Очень остроумно разрезал квадрат еще несколько тысяч лет назад китайский ученый Та-нг.

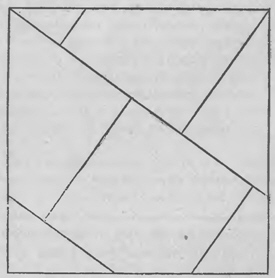


Вероятно, эти части квадрата первоначально служили для демонстрации геометрических фигур. В самом деле, из частей данного квадрата легко можно составить прямоугольник, параллелограмм, трапецию.

С течением времени было замечено, что из этих частей можно составить множество фигур-силуэтов самой причудливой формы, употребляя для составления каждой фигуры все семь частей квадрата. Так создалась увлекательная игра головоломка «танграм», получившая широкое распространение, в особенности на своей родине – в Китае. Там эта игра известна так широко, как, например, у нас шахматы. Устраиваются даже специальные состязания на составление наибольшего количества фигур с наименьшей затратой времени. Победители получают специальные призы.

Меня заинтересовала эта идея, и я тоже попробовал создать различные картинки - силуэты из предложенных частей квадрата. Так состоялось мое первое знакомство с превращением квадрата. (Приложение)

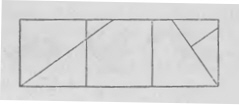
Однажды мне на глаза попалась головоломка, где из семи частей квадрата предлагалось составить три одинаковых квадрата.



Квадрат из головоломки очень похож на механизм с хорошо прилаженными частями, которые можно разобрать и из тех же частей собрать новый механизм. Дл того. Чтобы из готовых частей квадрата составить указанные геометрические фигуры, не нужны какие – либо расчеты и построения, достаточно проявить настойчивость, терпение, смекалку и решение находится.

Складывая фигуры из частей данной головоломки, я увидел, что можно получить не только три одинаковых квадрата, но и прямоугольник, составленный из этих квадратов.





Однако, для тех, кто увлечен математикой, не достаточно только складывать многоугольники из готовых частей квадрата, а хочется самому научиться разрезать квадрат на части, необходимые для составления той или иной фигуры. Иными словами – дать обоснование возможности превращения фигур. На языке геометрии это значит: найти те геометрические построения, при помощи которых разрезается квадрат, и доказать, что из полученных частей может быть составлена требуемая фигура. Такая постановка вопроса сразу превращает нашу головоломку в более интересную, но и более трудную геометрическую задачу на «разрезание» фигур.

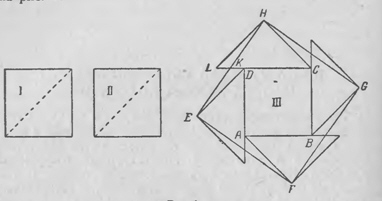
Сформулируем задание головоломки как геометрическую задачу:

*Показать, каким образом нужно разделить данный квадрат прямоугольными разрезами, чтобы переложением полученных частей можно было составить три сплошных квадрата, равных между собой.*

Здесь ничего не сказано о том, на сколько частей можно резать данный квадрат, а значит можно получить различные решения одной и той же задачи на перекраивание фигуры. Таким образом, при решении подобного рода задач открывается широкая возможность проявления геометрической интуиции.

Хочется заметить, что задачами превращений одной фигуры в другую путем переложения разрезанных частей занимались еще в древние времена. Один из самых замечательных арабских математиков Абул Вефа, живший в 10 веке, целый ряд вопросов, относящихся к геометрическому превращению фигур. На одном из собраний геометров и практиков Абул Вефе была предложена как раз наша обратная задача: *составить квадрат из трех равных квадратов.*

Познакомимся с тем решением, которое дал Абул Вефа. Он разрезал квадраты 1 и 2 по диагоналям и каждую из половинок приложил к квадрату 3, как показано на рисунке.



Затем он соединил отрезками прямых вершины Е,F,G иН. Полученный четырехугольник ЕFGН оказался искомым квадратом. Доказательство сразу следует из равенства образовавшихся маленьких треугольников НLК, ЕКD, ЕКD и остальных таких же (НL= ЕD; углы НLК и ЕDК – по 45 и

Способ Абул Вефы демонстрирует превращение трех квадратов в один квадрат, но если он разделен на 9 частей. Однако в нашей задаче квадрат разделен на 7 частей, а это уже меньшее число делений.

При решении нашей задачи будем исходить из следующей идеи: *если из трех искомых квадратов составить прямоугольник, то одна его сторона будет в три раза больше другой.* Следовательно, возможен такой путь решения задачи: сначала превратить данный квадрат в прямоугольник, одна сторона которого втрое длиннее другой, а затем этот прямоугольник двумя разрезами разбить на три квадрата.

Рассмотрим, как был разрезан квадрат для нашей головоломки.

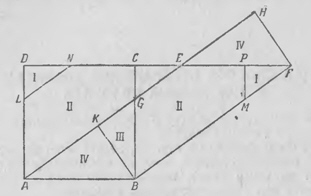
Примем сторону данного квадрата АВСD за единицу. Тогда его площадь будет равна одной квадратной единице. Прямоугольник, который мы предполагаем составить из частей квадрата, должен иметь ту же площадь, то - есть одну квадратную единицу; но так как одна его сторона должна быть втрое больше другой, то длины сторон прямоугольника (одну из них обозначим х, а другая будет 3х) можно найти из уравнения

*3*х∙х=1

3х2=1

Х= – длина одной стороны прямоугольника

= – длина другой стороны прямоугольника.



Построение.

1. Построим отрезок, равный, следующим образом: на продолжении стороны DC отложим отрезок DЕ, равный диагонали данного квадрата; его сторона будет (по теореме Пифагора: если каждый катет равен 1, то длина гипотенузы равна
2. Соединим вершину А квадрата с точкой Е прямой линией и точку ее пересечения со стороной ВС обозначим буквой G. Из прямоугольного ∆ АDЕ по теореме Пифагора будем иметь: АЕ2= АD2+ DЕ2, или АЕ2=1+2=3 и АЕ=.
3. Из вершины В квадрата проведем ВF||АЕ до пересечения в точке F с продолжением DC. Фигура АВFЕ – параллелограмм (ВF||АЕ, ЕF||АВ), равновеликий квадрату АВСD (то - есть параллелограмм и квадрат имеют равные площади).
4. Из точек В и F опустим перпендикуляры ВК и FН на прямую АЕ. Получим прямоугольник ВFНК, равновеликий параллелограмму АВFЕ (S= ВF∙ВК). Но параллелограмм АВFЕ равновелик квадрату АВСD; прямоугольник ВFНК равновелик данному квадрату.

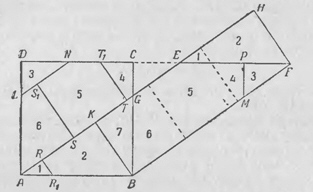
Покажем теперь, что квадрат АВСD и прямоугольник ВFНК не только равновелики, но и равносоставлены, то - есть могут быть составлены из одних и тех же частей.

1. Отложим на стороне АD отрезок АL=ВG, а на стороне ВF – отрезок ВМ=АG и проедем LN||АЕ и МР|ЕF. Тремя разрезами АG, ВК и LN квадрат АВСD разделился на 4 части, обозначенные на рисунке цифрами 1,2,3,4.

На такие же части делится и прямоугольник ВFНК разрезами ЕF, МР и ВG. В самом деле, ∆ ВКG (3) – общий для квадрата и прямоугольника; ∆ АВК=∆ ЕFН (4) (АВ=ЕF, как противоположные стороны параллелограмма, углы К и Н – прямые, углы при вершинах А и Е равны, как соответственные). Точки L, G и М одинаково удалены от прямой DF (по построению); следовательно, LD= GС=МР; кроме того, DLN=F (как углы с соответственно параллельными сторонами); отсюда ∆ DLN=∆F (1) и значит, LN=F=GЕ. Легко заметить, что и пятиугольник АLNСG (2) равен пятиугольнику ВGЕРМ (все стороны и углы соответственно равны).

Таким образом, из частей 1,2,3,4 квадрата АВСD действительно можно составить прямоугольник ВFНК. В этом прямоугольнике сторона ВF в три раза больше стороны ВК. Действительно, отрезок ВF равен и параллелен отрезку АЕ, то - есть ВF=, а из равенства площадей квадрата АВСD и прямоугольника ВFНК имеем: ВК∙ ВF=1, откуда

ВК== такой прямоугольник двумя разрезами легко превращается в три равных квадрата.



Перенумеруем заново все составные части этих квадратов и найдем их в основном квадрате АВСD следующим дополнительным построением: отложим на прямой АG отрезки КR,АS и SТ, каждый из которых равен ВК (стороне малого квадрата); из точек R,S и Т опустим перпендикуляры RR1, SS1 и ТТ1 к прямой АG. Образовавшиеся при этом 7 частей квадрата АВСD равны соответствующим частям прямоугольника ВFНК. Равные части обеих фигур на рисунке обозначены одинаковыми цифрами.

Так я рассмотрел решение этой задачи и получил геометрическое обоснование предложенного способа разрезания квадрата на 7 частей. Вполне возможно, что квадрат можно разрезать и иначе, чтобы из частей можно было сложить различные геометрические фигуры, а значит можно продолжать поиски новых решений задач на превращение квадрата.